# VECTORES

## 1. PRESENTACIÓN DEL TEMA

• Nos disponemos a atravesar a nado un río de 20 m de ancho.

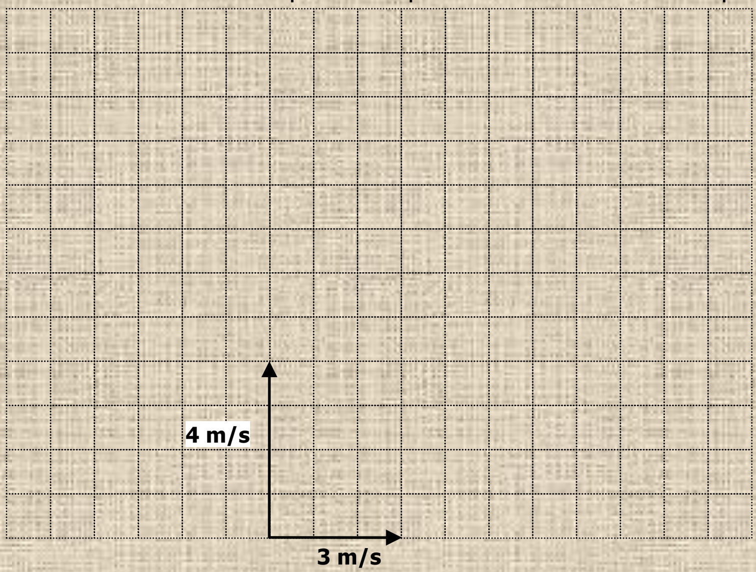
La velocidad de la corriente es de 3 m/s y la nuestra es de 4 m/s (según el dibujo)

a. Dibuja el punto al que iré a parar.

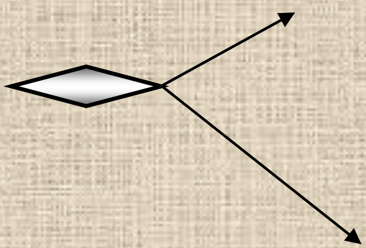
b. Dibuja la velocidad resultante.

c. Calcula la velocidad que llevaré: módulo y dirección (ángulo que forma con la dirección de la corriente)

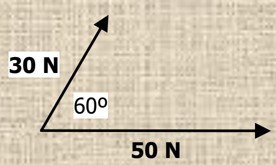
d. Hacia dónde tendría que nadar para atravesarlo de forma perpendicular a la orilla.



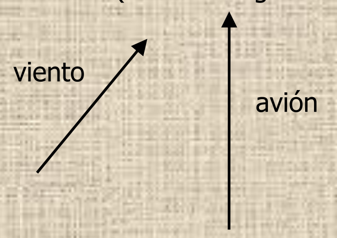

• Dos remolcadores arrastran un translántico según las fuerzas que se han representado en el dibujo. ¿Cuál será el vector de la fuerza resultante?



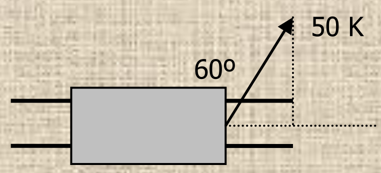
• Dos hombres tiran de un cuerpo mediante cuerdas. El primero lo hace con una fuerza de 30 N el otro con una de 50 N y formando un ángulo de 60º entre ellas. Hallar la intensidad de la resultante (R).



• Un avión es lleva la velocidad del dibujo por efecto de sus motores; si al cabo de un cierto tiempo aparece un viento con la velocidad del gráfico, ¿cuál será la nueva velocidad que tendrá el avión? (Resolverlo gráficamente).




• Un vagón es arrastrado por una fuerza de 50 Kilos según se ve en la figura:
¿Cuál es el valor de la componente útil?




## 2. VECTORES Y OPERACIONES

### GEOMETRIA ANALITICA PLANA. VECTORES

• Geometría es la parte de las matemáticas que estudia el espacio, los objetos y sus transformaciones.

• Analítica significa que el estudio se hace en coordenadas. Esto permite pasar al lenguaje algebraico. Una recta, por ejemplo, se convierte en una ecuación de primer grado: $y = 3x - 5$

• Plana, en dos dimensiones. Es decir, en el plano. Aquí entran puntos, rectas, polígonos, giros, semejanzas…

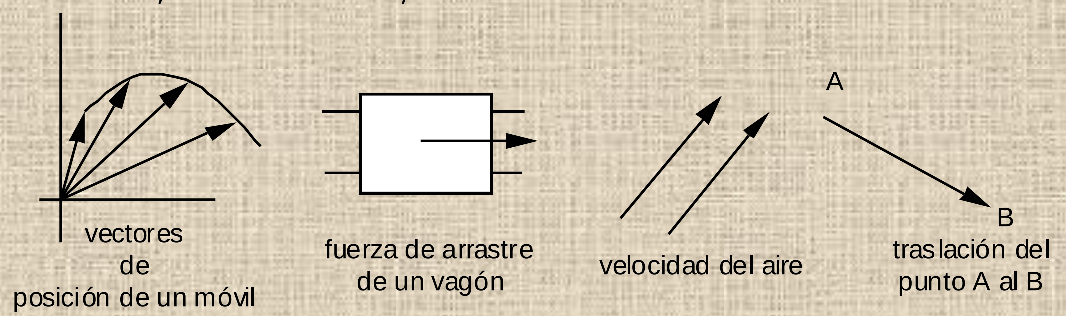
Se llama MAGNITUD a todo aquello que se puede medir.

Dentro de las magnitudes se habla de magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes escalares son aquellas que sólo precisan de un número para su cuantificación. Por ejemplo, la masa (5 Kg), la temperatura (20°C)

Las magnitudes vectoriales son direccionales y, por tanto, necesitan más elementos. Por ejemplo, la posición en el plano, la fuerza, la velocidad, la traslación.

En estos últimos casos hablaremos no de «escalar» sino de vector. Vector de posición, vector de fuerza, vector de velocidad,…



## VECTOR

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado. Queda determinado por dos puntos A (origen) y B (final)

Se llama módulo a la distancia entre los dos puntos y se representa $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Se llama dirección del vector a la de la recta en la que se encuentra y la de todas las paralelas.

Sentido a la ordenación que tiene entre sus extremos. Cada dirección admite dos sentidos que se dicen opuestos.

Los designaremos en la forma: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

### *Equivalencia o igualdad de vectores*

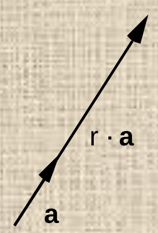
Recordar la equivalencia de fracciones.

Dos vectores se dicen equivalentes o iguales si tienen igual dirección, módulo y sentido.

## PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN VECTOR

El vector resultante k · **v** tiene

- La misma dirección.
- Sentido:
  - Opuesto... si k<0
  - Igual... si k>0
- Modulo: |k · **v**| = |k| · |**v**|




### Ejercicio

Sea ||**v**|| = 5. Hallar el módulo de –7 **v**

### Vector unitario

Es un vector de módulo unidad.

$\vec{u} = \dfrac{1}{\left|\vec{v}\right|} \cdot \vec{v}$ es un vector unitario en la dirección de v. (Se puede dejar para ejercicios)

Por ejemplo si $\left|\vec{v}\right| = 5; \ \dfrac{1}{5}\vec{v} = \vec{u}; \ \left|\vec{u}\right| = \dfrac{1}{5} \cdot 5 = 1$

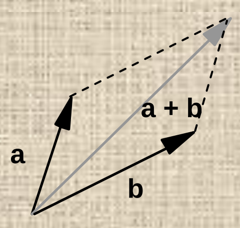
## SUMA DE VECTORES

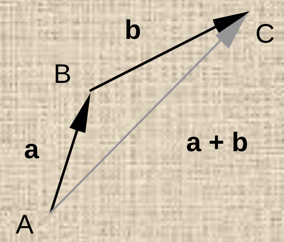
Es la operación que resulta de la acción conjunta de dos vectores.

***Ley del paralelogramo y ley del triángulo o poligonal***

• El vector suma de dos vectores, que situamos con origen común, equivale con la diagonal principal del paralelogramo que determinan.

Utilizar **u** y **v**.




Si los vectores vienen definidos por puntos tendríamos; o ponemos uno a continuación de otro tendríamos la ley del triángulo o la poligonal. El vector resultante es el que une el principio con el final.

En el dibujo se ve que el resultado es el mismo vector.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

**PROPIEDADES**

Suma de vectores

**Asociativa**

Cuando hay que sumar varios vectores el orden de asociación no varía el resultado

(**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

Asociativa: $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$

**Vector nulo o cero**

El vector **0** = $\overrightarrow{AA}$

**v** + **0** = **v**

Elemento neutro: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}; \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

**Vector opuesto**

El vector opuesto de **v** es el vector **–v**

**v** + (**–v**) = **0**

El vector opuesto de $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{BA}$

Elemento opuesto: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{-v} = \overrightarrow{BA}; \vec{v} + \overrightarrow{-v} = \vec{0}$

**Conmutativa**

El orden de la suma de vectores no altera el resultado

**u** + **v** = **v** + **u**

Ilustrarlo con el dibujo: paralelogramo o triángulo.

Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Producto por escalares

- Asociativa: r · (s · **a**) = r · s · **a**
- Distributiva 1: (r + s) · **a** = r · **a** + s · **a**
- Distributiva 2: r · (**a** + **b**) = r · **a** + r · **b**
- Neutro: 1 · **a** = **a**

Otras:

0·**v** = **0**. Su módulo es cero, no tiene dirección.

-1·**v**=**-v**. Los módulos y dirección son iguales el sentido es opuesto.

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

**RESTA DE VECTORES**

Restar un vector a otro es sumar el opuesto.

**u** – **v** = **u** + (–**v**)

**COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES**

En este apartado vamos a fijarnos en los vectores como direcciones del espacio. Vamos a clasificarlos según su dirección.

Dos vectores **u** y **v** se dicen linealmente dependientes si tienen la misma dirección. Pueden tener distinto módulo y sentido. $\vec{v} = r \cdot \vec{u}$

Dos vectores se dicen linealmente independientes si ocurre lo contrario:

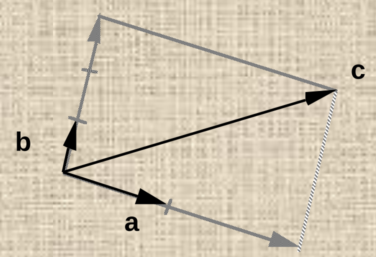
**COMBINACION LINEAL**

- Un vector **v** es combinación lineal de **x** y **y** si **v** = a **x** + b **y**

En el dibujo el vector **v** es combinación lineal de **x** y **y**.

En concreto, **v** = 2 **x** + 3 **y**

Otro ejemplo **x** -2**y**




## 3. COORDENADAS DE UN VECTOR

Dos vectores del plano de distinta dirección se dice que forman una base porque cualquier otro vector se puede poner como c.l. de ellos. Y esta combinación lineal es única.

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

A los números de la c.l. se le llaman coordenadas del vector respecto de la base.

Se llama base ortogonal, a la que los vectores son perpendiculares.

Base ortonormal, si además tiene de módulo 1.

**OPERACIONES CON COORDENADAS**

La base lo que me da propiamente es una malla en el plano

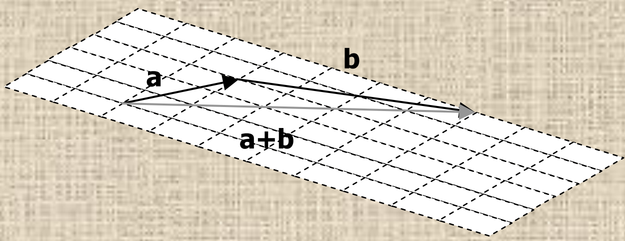
**COORDENADAS DEL VECTOR SUMA**

Sean **u**$(x_1, y_1)$ y **v**$(x_2, y_2)$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Mejor usar base ortonormal.

• En el gráfico **u** (1, 3) y **v**(4,2): **u** + **v** = (1, 3) + (4, 2) = (5, 5)




**Ejercicio**

Hallar la suma de los vectores **u**(3, 4) y **v**(–1, 5)

**COORDENADAS DEL VECTOR** r · **u**

Sea $r \in R$ un número y **u**$(x_1, y_1)$ un vector del plano.

$$r \cdot \mathbf{u} = (r \cdot x_1, r \cdot y_1)$$

Por ejemplo, 4 · **u**(3, 5) = (12, 20)

**COORDENADAS DE UNA COMBINACIÓN LINEAL**

Sean los vectores **u**$(x_1, y_1)$ y **v**$(x_2, y_2)$. Se llama combinación lineal de ellos a cualquier vector que obtenemos en la forma:

$$a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

Siendo *a* y *b* dos números reales.

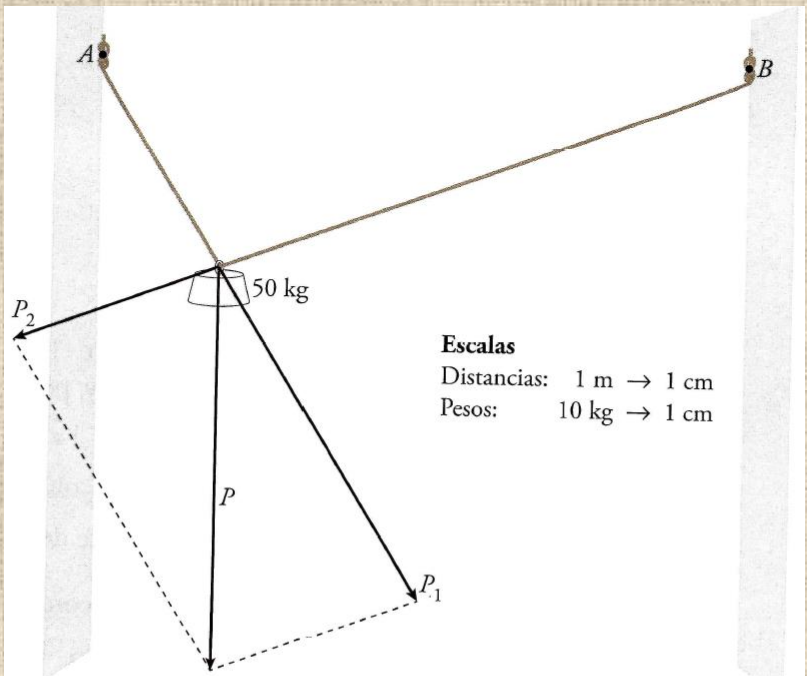
Hacerlo paso a paso.

Sean **u**(2, -1) y **v**(-1, 3). Hallar 3**u** – 5**v**. Hallar –**u**-2**v**

Ejercicio.-

Expresar el vector (4, 3) como c.l. de (2, –1) y (–1, 3)

Ejemplo físico:




Aquí vemos lo que significa la combinación lineal o la posibilidad de expresar un vector respecto a otros dos que harían como de base.

## 4. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Una operación es una correspondencia que a dos elementos le hace corresponder otro. Se pueden poner suma de vectores, producto escalar por vector y las de escalares.

Suma de números.

$$(3,5) \xrightarrow{+} 3+5=8$$

Producto de números

$$(3,5) \xrightarrow{x} 3\cdot 5 = 15$$

De los vectores hemos visto distintas operaciones: suma, resta, producto por escalares. A continuación vamos a ver una nueva operación que se llama PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES. Producto porque se parece bastante a un producto. Escalar porque el resultado de la operación es un escalar (número) y de vectores porque se le asocia a una pareja de vectores.

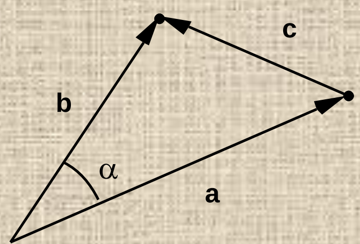
Esta operación de vectores se define a partir del teorema del coseno

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Pues bien, llamaremos producto escalar de los vectores **a** y **b**:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$



**Ejemplos**

• Hallar el producto escalar de los vectores **a** y **b** sabiendo que ||**a**|| = 3; ||**b**|| = 2 y $\alpha = 45°$

• Lo mismo para los vectores **a** y **b** sabiendo que |**a**| = 5; |**b**| = 2 y $\alpha = 90°$

• Idem para **a** y **b** sabiendo que |**a**| = 5; |**b**| = 0 y $\alpha = 45°$

**PROPIEDADES**

1. Módulo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

2. Conmutativa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

3. Distributiva:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

4. Perpendicularidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ (\vec{a} \ y \ \vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

5. Asociativa:

$$(r \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = r \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (r \cdot \mathbf{b})$$

**EJEMPLOS**

1. Sabiendo que los vectores **a** y **b** tienen de módulo respectivamente: | **a** | = 5 y | **b** | = 3; efectúa el siguiente producto escalar simplificando el resultado: (**a + b**) · (**a – b**)

Sol: (**a + b**) · (**a – b**) = (**a + b**) · **a** – (**a + b**) · **b =**

2. En el caso anterior, si $\alpha = 60°$, ¿cuánto es el módulo de **a** + **b**?

3. Sabiendo que **a** · **b =** 5, calcula (7 **a**) · (5 **b**)

**PRODUCTO ESCALAR EN COORDENADAS**

Si referimos los vectores a una base ortonormal (perpendiculares y de módulo 1) y aplicando las propiedades anteriores obtenemos la expresión del producto escalar en coordenadas.

Sean **a** $(a_1, a_2)$ y **b** $(b_1, b_2)$ referidos a una base ortonormal **i**, **j**.

Es decir,

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} \text{ y } \mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j}) \cdot (b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

**Ejemplos**

• Hallar el producto escalar de los vectores **a** (3, 5) y **b** (2, 4)

**a** · **b** = 3 · 2 + 5 · 4 = 26

• Lo mismo para los vectores **a** (3, 4) y **b** (–4, 3)

**a** · **b** = 3 · (–4) + 4 · 3 = 0. Luego son perpendiculares

## 5. APLICACIONES (EN UNA BASE ORTONORMAL)

**MÓDULO DE UN VECTOR:**

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

**COSENO DEL ÁNGULO DE DOS VECTORES**

• De la expresión inicial podemos despejar el coseno del ángulo que forman llegando a la siguiente expresión:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\alpha \qquad \rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

**Ejemplo:**

Hallar el ángulo que forman los vectores **a**(2, 1) y **b**(3, 5)

***¿Cómo dar un vector perpendicular a otro en coordenadas?***

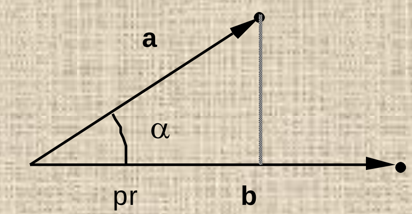
De **v**(a, b) es perpendicular **n**(-b,a) y todas sus c.l. Lo mismo que **n**(b, -a) y todas las suyas.

Por ejemplo, dar un vector perpendicular a **a**(2, 3)

**PROYECCION ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO**

Sean **a** y **b** dos vectores. Se llama proyección ortogonal de **a** sobre **b** al segmento que determina la proyección ortogonal de **a** sobre **b**

$$p = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$




Es el producto escalar de ambos vectores dividido entre el módulo del vector sobre el que se proyecta. La proyección será positiva si el ángulo es agudo. Será negativa si el ángulo es obtuso. Es decir, según la proyección tenga el sentido de **b** o el sentido opuesto.

**Ejemplo**

• Vamos a hallar la proyección de **a** (2, 1) sobre **b** (–3, 5)
• Proyección de **a**(2, 1) sobre (–3, 6)

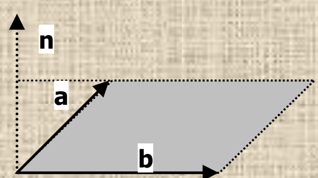
**ÁREA DE UN PARALELOGRAMO. INTRODUCCIÓN AL DETERMINANTE**

(Se puede dejar. Tampoco viene en el libro)

Sea el paralelogramo determinado por los vectores ($a_1$, $a_2$) y ($b_1$, $b_2$).

Podemos tomar como base el vector **b** y como altura la proyección de **a** sobre **b**.

Entonces la altura del paralelogramo quedaría:



$$S = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \vec{a} \cdot \vec{n} = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

## 6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### *1. VECTORES Y OPERACIONES*

### *2. COORDENADAS DE UN VECTOR*

### *3. OPERACIONES CON COORDENADAS*

**1.** Hallar «a» para que el vector **u**(a, 3) tenga de módulo 5.

**2.** Determinar el valor de x para que el vector **v**(6, x) tenga de módulo 10.

**3.** Hallar las coordenadas de **a**(1, 2) respecto de **b**(2, –1) y **c**(–1, 1).

**4.** De los siguientes vectores del plano: **a**(1, 2); **b**(3, 1) y **c**(0, 5)
a) Demuestra que **a** y **b** son linealmente independientes
b) Hallar las coordenadas de **c** respecto de **a** y **b**.
c) Hallar el ángulo que forman **a** y **b**.
d) Determinar la pendiente de **a** y **b**.

### *4. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES*

**5.** Calcula el valor de 'x' para que el ángulo que formen los vectores **a**(3, x) y **b**(5, 2) sea de 60°.

**6.** De los vectores **a** y **b** conocemos |**a**| = 2 y |**b**| = 5 y el ángulo que forman es a = 60º. Calcula |**a** + **b**|$^2$.

**7.** *Dados los vectores* $\vec{x}\,(a,\ 1)$ *e* $\vec{y}\,(-2,\ b)$, *halla los valores de* $a$ *y* $b$ *para que* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *sean perpendiculares, y que* $\left|\vec{y}\right| = 2\sqrt{2}$.

**8.** Responder a los siguientes apartados:
a) *Halla el ángulo que forman los vectores* $\vec{a}\,(2,\ 3)$ *y* $\vec{b}\,(2,\ -3)$.
b) *¿Cuánto ha de valer* $k$ *para que los vectores* $\vec{x}\,(k,\ 3)$ *e* $\vec{y}\,(k,\ -3)$ *sean perpendiculares?*

(1 punto)

**9.** a) *Halla el ángulo que forman los vectores* $\vec{a}\,(2,\ 3)$ *y* $\vec{b}\,(2,\ -3)$.

**10.** Responder a los siguientes apartados:
Sabiendo que los vectores **a** y **b** son perpendiculares y que tienen de módulo respectivamente: | **a** | = 5 y | **b** | = 3;
a) Calcular el siguiente producto escalar: (2**a** + **b**) · (**a** + 3**b**)
b) Calcula |**a** + **b**|
c) Calcula |**a** – **b**|
d) Sabiendo que **a** (x, 3) y **b** (y, z) hallar los valores de x, y, z.

**11.** Responder a los siguientes apartados:
a) Hallar un vector perpendicular al **u** (6, 8)

b) Un vector unitario linealmente dependiente con él.

c) La proyección de **u** sobre el **v** (–3, 4)

d) El ángulo que forman **u** y **v**.

e) El área del paralelogramo que determinan.

**12.** Responder a los siguientes apartados:

a) Dado el vector $\vec{u}(3a, 4a)$, hallar el valor de 'a' para que su módulo sea 10.

b) Hallar un vector perpendicular a él que sea unitario.

c) Dibujar el vector $\vec{u}$ y determinar el ángulo que forma con el eje X.

d) Hallar la pendiente de dicho vector.

## *5. APLICACIONES*

**13.** Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores siguientes **a**(2, 6) y **b**(3, -3).